



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 28 februarie 2015

clasa a XII – a

Filiera teoretică - Profil real - Specializarea Științe ale naturii

- 1) (7p) Definim pe \mathbb{R} legea de compoziție “*” prin $x * y = \ln(e^x + e^y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).
- a) (4p) Arătați că legea de compoziție “*” este comutativă, asociativă, dar nu admite element neutru.
- b) (3p) Demonstrați că $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 2) (7p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X_a = I_2 + aA, a > -1\}$.
- a) (4p) Arătați că (G, \cdot) este grup abelian.
- b) (3p) Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}, f(X_a) = \ln(a + 1)$ este izomorfism de la grupul (G, \cdot) la grupul $(\mathbb{R}, +)$.
- 3) (7p) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
$$F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & x \leq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b, & x > 1 \end{cases}$$
Să fie o primitivă pentru o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați, apoi, funcția f .
- 4) (7p) Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}, I_n = \int_0^1 x^n \sin x \, dx$.
- a) (2p) Calculați I_1 .
- b) (5p) Arătați că $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n \sin 1 - \cos 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu note de la 0 la 7.

Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse și selectate de către:

Prof. Zlămpăret Mihaela Colegiul Economic Nicolae Titulescu

Prof. Polgar Corina Colegiul Tehnic C.D. Nenitescu